Corso di introduzione all'Astrofisica

I modulo

Prof. Giuseppe Bertin

Anno accademico 2009–2010

Indice

Capitolo 1

Il teorema del viriale

1.1 Problema

Si consideri un sistema di molte particelle in interazione relativa tramite forze centrali. Si discuta la ripartizione fra energia cinetica e energia potenziale in configurazioni stazionarie. Per il caso di particelle in interazione gravitazionale, si determini una relazione che consenta di stimare la massa totale del sistema a partire da misure di velocità tipiche e scala di lunghezza caratteristica per il sistema considerato.

Nota 1. È un modo di introdurre sistemi relativamente complessi su cui derivare informazioni qualitative importanti, prescindendo dalle orbite delle singole particelle.

Nota 2. L'argomento consente di introdurre in maniera naturale distribuzioni continue di materia.

1.2 Equazioni del moto e energia per sistemi di molte particelle

Consideriamo un sistema di N particelle in mutua interazione tramite forze di tipo centrale. Se indichiamo con $r_{i,j}$ la distanza fra la particella i-esima e quella j-esima, essa si può scrivere come:

$$r_{i,j} = \left| \underline{r}_i - \underline{r}_j \right| , \tag{1.1}$$

per cui la forza della particella j-esima sulla particella i-esima potrà scriversi come:

$$\underline{F}_{i,j} = -\frac{d\,U_{i,j}}{d\,r_{i,j}} \frac{\underline{r}_i - \underline{r}_j}{r_{i,j}} = -\underline{F}_{j,i}. \tag{1.2}$$

L'energia potenziale di interazione tra due particelle dipende solo dalla distanza relativa tra le particelle:

$$U_{i,j} = k_{i,j}\, u(r_{i,j}), \tag{1.3}$$

con $k_{i,j} = k_{j,i}$ costante di interazione tra due particelle. Come esempi di riferimento si può pensare a

$$u(r_{i,j}) = {r_{i,j}}^{-s}. \tag{1.4}$$

L'interazione gravitazionale è quindi descritta da $s = 1$ e $k_{i,j} = -Gm_im_j$, quella elettrostatica da $s = 1$ e $k_{i,j} = q_iq_j$, un insieme di oscillatori da $s = -2$ e $k_{i,j}$ = costanti delle "molle" di riferimento.

Le $3N$ equazioni del moto per un sistema di tali N-particelle si scrivono:

$$m_i\ddot{\underline{r}}_i = \sum_j^{i\neq j} \underline{F}_{i,j}. \tag{1.5}$$

Un integrale del moto è l'energia totale:

$$E = K + U, \tag{1.6}$$

ove l'energia cinetica K è la somma delle singole energie cinetiche

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\underline{r}}_i{}^2, \tag{1.7}$$

e l'energia potenziale U è la somma delle energie potenziali $U_{i,j}$, tenendo in mente di contare <u>una sola volta</u> l'energia di interazione fra due particelle:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{i\neq j} U_{i,j}. \tag{1.8}$$

La relazione (1.6), come per il caso di particella singola, si ottiene moltiplicando per $\dot{\underline{r}}_i$ l'equazione del moto (1.5) e sommando su tutte le particelle:

$$\sum_i m_i \dot{\underline{r}}_i \cdot \ddot{\underline{r}}_i = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m_i \dot{\underline{r}}_i{}^2\right) = \sum_{i,j}^{i\neq j} \dot{\underline{r}}_i \cdot \underline{F}_{i,j}. \tag{1.9}$$

Dalla (1.2) e dalla (1.7) otteniamo:

$$\frac{d}{dt}K = -\frac{1}{2} \sum_{i,j}^{i\neq j} \left(\dot{\underline{r}}_i - \dot{\underline{r}}_j\right) \cdot \frac{\underline{r}_i - \underline{r}_j}{r_{i,j}} \frac{dU_{i,j}}{dr_{i,j}} \tag{1.10}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{i,j}^{i\neq j} \frac{dU_{i,j}}{dt} \tag{1.11}$$

Nota

$$\begin{aligned} \frac{dr_{i,j}}{dt} &= \frac{d}{dt}\sqrt{\left(\underline{r}_i - \underline{r}_j\right) \cdot \left(\underline{r}_i - \underline{r}_j\right)} \\ &= \frac{1}{r_{i,j}} \left(\underline{r}_i - \underline{r}_j\right) \cdot \left(\dot{\underline{r}}_i - \dot{\underline{r}}_j\right) \end{aligned}$$

1.3 Teorema del viriale

Se moltiplichiamo le equazioni del moto (1.5) per $\underline{r}_i$ e sommiamo su tutte le particelle otteniamo la seguente relazione:

$$\begin{aligned}\sum_i m_i \underline{r}_i \cdot \ddot{\underline{r}}_i &= \sum_i \left[m_i \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{2} \underline{r}_i \cdot \underline{r}_i \right) - m_i \dot{\underline{r}}_i \cdot \dot{\underline{r}}_i \right] \\ &= \frac{d^2}{dt^2} I - 2K = \sum_{i,j}^{i \neq j} \underline{r}_i \cdot \underline{F}_{i,j}, \end{aligned} \tag{1.12}$$

ove la quantità I misura la distribuzione di massa ed è definita da:

$$I = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2. \tag{1.13}$$

Come nella derivazione della (1.11), tenendo conto della (1.2) e del fatto che gli indici sono muti, dalla (1.12) otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{d^2 I}{dt^2} &= 2K + \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{i \neq j} \left(\underline{r}_i - \underline{r}_j \right) \cdot \underline{F}_{i,j} \\ &= 2K - \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{i \neq j} \frac{dU_{i,j}}{dr_{i,j}}, \end{aligned} \tag{1.14}$$

che contiene il teorema del viriale. In particolare se ci riduciamo alla classe di potenziali descritti dalla (1.3) otteniamo:

$$\frac{dU_{i,j}}{dr_{i,j}} = -s \frac{U_{i,j}}{r_{i,j}}, \tag{1.15}$$

e, pertanto,

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 2K + s \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{i \neq j} U_{i,j} = 2K + sU. \tag{1.16}$$

Per sistemi stazionari il termine di sinistra è trascurabile. In questo caso il teorema del viriale viene quindi definito dalla relazione

$$2K + sU = 0. \tag{1.17}$$

Tuttavia è da notare che la (1.16) è esatta, mentre la (1.17) può essere vista come una definizione di stazionarietà. Per i casi particolari descritti in precedenza abbiamo, quindi,

$$\left.\begin{aligned} &2K + U = 0 \\ &E = \frac{U}{2} = -K \end{aligned}\right\} \quad \text{per forze inversamente proporzionali al quadrato della distanza,} \tag{1.18}$$

$$\begin{aligned} K &= U \\ & \qquad\qquad \text{per sistemi di oscillatori} \\ E &= 2U = 2K. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Il teorema del viriale può essere derivato con procedimento analogo per sistemi continui e anche in presenza di forze esterne. Su questi aspetti non ci soffermeremo oltre; tuttavia è utile considerare le applicazioni ad alcuni sistemi continui.

Nota. Una piccola osservazione sulla (1.16) riguarda il centro di massa. La (1.16) è valida in generale; se scriviamo

$$\underline{r}_i = \underline{R}_{\text{c.m.}} + \underline{\rho}_i \tag{1.20}$$

ove $\underline{\rho}_i$ sono le coordinate nel centro di massa, si ha

$$\begin{aligned} I &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\underline{R}_{\text{c.m.}} + \underline{\rho}_i \right)^2 \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\underline{R}_{\text{c.m.}} \right)^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \underline{\rho}_i^{\,2} \\ &= \frac{1}{2} M_{\text{tot}} \left(\underline{R}_{\text{c.m.}} \right)^2 + I' \\ K &= \frac{1}{2} M_{\text{tot}} \left(\dot{\underline{R}}_{\text{c.m.}} \right)^2 + K' \end{aligned}$$

Poiché $\dot{\underline{R}}_{\text{c.m.}} =$ costante si ha:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = \frac{d^2 I'}{dt^2} + M_{\text{tot}} \left(\dot{\underline{R}}_{\text{c.m.}} \right)^2$$

e il secondo termine cancella la differenza fra K e K', come deve essere.

1.4 Sistemi continui a simmetria sferica

Nel limite $N \to \infty$ è conveniente introdurre una descrizione continua del sistema studiato. La distribuzione di massa delle particelle sarà definita da una funzione densità $\rho = \rho(\underline{r})$ che nel caso di simmetria sferica dipenderà solo dalla distanza r dal centro di simmetria:

$$\rho = \rho(r). \tag{1.21}$$

Da notare che la quantità di materia contenuta in una sfera di raggio r è data da

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr', \tag{1.22}$$

e la massa totale è

$$M_{\text{tot}} = \lim_{r \to \infty} M(r). \tag{1.23}$$

Per un tale sistema continuo la quantità I definita dalla (1.13) diviene:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\infty 4\pi r^2 \cdot r^2 \rho(r) dr = 2\pi \int_0^\infty r^4 \rho(r) dr. \tag{1.24}$$

Per un sistema continuo si identificano naturalmente due contributi all'energia cinetica totale, uno ordinato, associato ai moti fluidi $\underline{u} = \underline{u}(\underline{r})$

$$K_{\mathrm{ord}} = \frac{1}{2}\int \rho \underline{u}^2 d^3\underline{r} \tag{1.25}$$

e uno disordinato associato alla pressione $p = p(\underline{r})$ e, indirettamente, all'energia interna (termodinamica):

$$K_{\mathrm{dis}} = \frac{3}{2}\int p\, d^3 r. \tag{1.26}$$

Non ci soffermeremo a giustificare queste affermazioni.

Nel seguito di questo paragrafo ci limiteremo a discutere il caso gravitazionale. In questo caso, per una proprietà generale delle forze dipendenti dall'inverso del quadrato della distanza ($s = 1$), nota in elettrostatica come *Teorema di Gauss*, la forza agente sulla massa $d\,m$ posta a distanza r dal centro dipende solo dalla massa contenuta nella sfera di raggio r e vale (dimostrazione in Berkeley, §9.2):

$$dF = -\frac{GM(r)}{r^2} d\,m. \tag{1.27}$$

Pertanto il contributo gravitazionale indicato nelle (1.12) può essere facilmente valutato:

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} \underline{r}_i \cdot \underline{F}_{i,j} &= -\int_0^\infty r \frac{GM(r)}{r^2}\rho(r) 4\pi r^2 dr \\ &= -4\pi G \int_0^\infty M(r)\rho(r) r dr \end{aligned} \tag{1.28}$$

ed esso vale U, secondo la derivazione precedente. Pertanto l'energia gravitazionale totale per un sistema sferico continuo di massa può essere espressa come:

$$U = -4\pi G \int_0^\infty M(r)\rho(r) r dr = -\frac{GM_{\mathrm{tot}}^2}{R} f[\rho] \tag{1.29}$$

ove il fattore $f[\rho]$ dipende dalla funzione ρ e R indica una scala tipica della distribuzione di massa. Possiamo considerare due casi particolari:

1.4.1 Sfera omogenea.

$$\begin{aligned}\rho(r) = \ & \rho_0 \quad \text{per } r \leq R_T \\ & 0 \quad \text{per } r > R_T\end{aligned} \tag{1.30}$$

$$\begin{aligned} M(r) &= \frac{4\pi}{3}\rho_0 r^3 = M_{\mathrm{tot}} \left(\frac{r}{R_T}\right)^3 \quad \text{per } r \leq R \\ &= M_{\mathrm{tot}} \text{ per } r > R \end{aligned} \tag{1.31}$$

$$f = 3\int_0^1 x^4 dx = \frac{3}{5}; \;\; (R = R_T \text{ in } (1.29)) \tag{1.32}$$

1.4.2 Galassia sferica

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \rho_0 \frac{R^4}{r^2(R+r)^2} \text{ per } r \leq R_T \\ &= 0 \text{ per } r > R_T \end{aligned} \tag{1.33}$$

con $R_T \gg R$. Questa espressione è ottenuta come un buon fit della distribuzione di <u>luminosità</u> di galassie “sferiche”, supponendo che il rapporto massa/luminosità all’interno di una singola galassia sia circa costante.

$$\begin{aligned} M(r) &= 4\pi\rho_0 \int_0^r \frac{R^4}{r'^2(R+r')^2} r'^2 dr' \\ &= 4\pi\rho_0 R^4 \left[-\frac{1}{R+r'}\right]_0^r = 4\pi\rho_0 R^3 \frac{r}{r+R} \text{ per } r \leq R_T \\ &= M_{\text{tot}} = 4\pi\rho_0 R^3 \left(\frac{R_T}{R+R_T}\right) \simeq 4\pi\rho_0 R^3 \left(1 - \frac{R}{R_T}\right) \text{ per } r > R_T \end{aligned} \tag{1.34}$$

Nota

$$M(R) = \frac{1}{2}\left(4\pi\rho_0 R^3\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{R}{R_T}\right) M_{\text{tot}} \tag{1.35}$$

$$\begin{aligned} U &= -\cancel{4\pi} G \int_0^{R_T} M_{\text{tot}} \left(1 + \frac{R}{R_T}\right) \frac{\cancel{r}}{R+r} \cdot \frac{1}{\cancel{4\pi}} M_{\text{tot}} \left(1 + \frac{R}{R_T}\right) \frac{R}{\cancel{r^2}(R+r)^2} \cancel{r} dr \\ &= -\frac{GM_{\text{tot}}^2}{R} \left(1 + \frac{R}{R_T}\right)^2 \int_0^{R_T/R} \frac{1}{(1+x)^3} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U &= -\frac{GM_{\text{tot}}^2}{R} \left(1 + \frac{R}{R_T}\right)^2 \frac{1}{2} \left(1 - \frac{R^2}{R_T^2 \left(1 + \frac{R}{R_T}\right)^2}\right) \qquad (1.36) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{GM_{\text{tot}}^2}{R} \hat{f} \\ \hat{f} &= \left(1 + \frac{R}{R_T}\right)^2 - \frac{R^2}{R_T^2} = 1 + \frac{2R}{R_T} \qquad (1.37) \end{aligned}$$

1.5 Una semplice applicazione astrofisica

Lo studio dell’allargamento di righe stellari di assorbimento consente di stimare una velocità tipica (σ) all’interno di galassie ellittiche. Studi fotometrici consentono di valutare il raggio R

di metà luminosità. Le galassie ellittiche sono sistemi molto regolari ed è plausibile che si trovino in condizioni stazionarie e quasi-stazionarie. Possiamo quindi, per tali sistemi, applicare il teorema del viriale e, dalla (1.37), ottenere:

$$2 \cdot \frac{1}{2} M_{\rm TOT}\, \sigma^2 - \frac{1}{2} \frac{G M_{\rm TOT}}{R} \approx 0, \tag{1.38}$$

ovvero

$$G M_{\rm TOT} \approx 2\sigma^2 R. \tag{1.39}$$

Pertanto la massa totale in unità solari ($M_\odot$) di una galassia ellittica è misurata da:

$$M_{\rm TOT} \approx \frac{2\sigma^2 R}{v_{\rm T}^2 (1{\rm AU})} M_\odot, \tag{1.40}$$

ove $v_{\rm T} \sim 30$ Km/s è la velocità della Terra intorno al Sole e 1 AU$\sim 1.5\times 10^{13}$ cm è la distanza Terra-Sole. Per $R \simeq 2$ Kpc $\simeq 6 \times 10^{21}$ cm e $\sigma \simeq 300$ Km/s si ottiene:

$$M_{\rm TOT} \approx 10^{11} M_\odot \tag{1.41}$$

1.6 Gravità e calori specifici negativi

Se consideriamo la relazione (1.18) per il viriale nel caso gravitazionale, notiamo che:

$$E = \frac{U}{2} = -K. \tag{1.42}$$

Se in qualche maniera estraiamo energia da un tale sistema cosicché raggiungiamo un nuovo equilibrio caratterizzato da $E' < E$ è chiaro che il sistema (se non variamo $M_{\rm TOT}$ deve contrarsi (per la (1.29)) e riscaldarsi (per la (1.42) in quanto dovrà essere $K' > K$. Questo comportamento inusuale è spesso indicato dicendo che i sistemi gravitazionali sono sistemi a calore specifico negativo.

1.7 Oscillazioni collettive

Consideriamo una situazione di un sistema autogravitante vicina a una configurazione di equilibrio corrispondente a energia totale E e a massa totale $M_{\rm tot}$. È stato visto tramite semplici esempi che la specifica distribuzione di massa influisce poco sul fattore f nell'energia gravitazionale

$$U = -\frac{G M_{\rm tot}^2}{R} f \tag{1.43}$$

Analogamente per la quantità I sarà:

$$I = M_{\rm tot} R^2 g(\rho), \tag{1.44}$$

e il fattore g poco dipende dai dettagli di ρ. Possiamo quindi assumere che nella relazione viriale

$$\frac{d^2}{dt^2} I = 2K + U = 2E - U \tag{1.45}$$

per E e $M_{\rm tot}$ fissati i fattori f e g siano costanti in vicinanza della configurazione di equilibrio e che l'evoluzione temporale sia dettata soltanto dall'evoluzione di R. Se scriviamo:

$$R = R_0 + \delta R(t) \text{ con } \frac{\delta R}{R_0} \ll 1 \tag{1.46}$$

la (1.45) diviene:

$$g M_{\rm tot} 2 R_0 \delta \ddot{R} \simeq 2E + \frac{G M_{\rm tot}^2}{R_0} f - \frac{G M_{\rm tot}^2}{R_0^2} f \delta R. \tag{1.47}$$

La condizione di equilibrio determina R_0:

$$R_0 = -\frac{G M_{\rm tot}^2}{2E} f, \tag{1.48}$$

e l'evoluzione temporale è dettata da

$$\delta \ddot{R} + \omega^2 \delta R = 0, \tag{1.49}$$

con

$$\omega^2 = \frac{G M_{\rm tot}}{2 R_0^3} \frac{f}{g} = 4\pi G \bar{\rho}, \tag{1.50}$$

ove $\bar{\rho}$ è una densità tipica. Pertanto abbiamo dimostrato che il sistema compie oscillazioni intorno alla configurazione di equilibrio e calcolato la frequenza di tali oscillazioni. Per l'esempio astrofisico precedente con $M_{\rm tot} \sim 10^{11} M_\odot \sim 2 \times 10^{44}$ g, $R_0 = 2$ Kpc$\sim 6 \times 10^{21}$ cm, $G = 6.7 \times 10^{-8}$ c.g.s. abbiamo

$$\frac{2\pi}{\omega} \approx 10^8 \text{ anni}. \tag{1.51}$$